doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2022.04.004

“概率密度”概念之多角度溯源

王继强
（山东财经大学 统计与数学学院，山东 济南 250014）

摘　要　以概率论中一维连续型随机变量的概率密度为研究对象，从物理、数理、几何、测度多个角度揭示了概率密度概念的由来和意涵，可望彻底解决读者疑虑，达到正本清源的效果.

关键词　随机变量；概率密度；分布函数

中图分类号　O211　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008－1399(2022)04－0011－02

Probability Density from Different Angles

WANG Jiqiang
(School of Statistics and Mathematics, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, China)

Abstract　The origin and the meaning of the probability density is discussed from the perspectives of physics, mathematics, geometry and measure in order to eliminate some doubts and achieve a better understanding of the concept.

Keywords　random variable, probability density, distribution function

1　引言

在概率论中，随机变量有离散型和连续型两种，其中离散型随机变量的概率分布规律用分布列（律）来描述，而为描述连续型随机变量的概率分布规律，则引入了概率密度函数的概念，简称“概率密度”.

概率密度按随机变量个数的多少可分为一维概率密度和二维概率密度两种，本文以一维概率密度为研究对象. 概率密度的定义随教材不同而略有不同，但都是等价的[1-7]. 此处采用教材[6]中的定义：

设 X 为连续型随机变量，若存在非负可积函数 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$，使得对任意常数 $a,b(a\leqslant b)$，有

$$P\{a\leqslant X\leqslant b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,\tag{1}$$

则称 $f(x)$ 为 X 的概率密度.

收稿日期：2021－01－24　　修改日期：2022－04－22

基金项目：山东省一流本科课程（线上线下混合式 473）；山东财经大学教学改革研究项目（jy202023）.

作者简介：王继强（1976－），男，山东枣庄人，博士，教授，从事大学数学教学和研究. Email: sdcdmcm@126.com.

在很多教材中，概率密度的定义直接出现在离散型随机变量的分布列概念之后，此前几乎没有任何铺陈，可谓“横空出世”！从离散型随机变量到连续型随机变量，跳跃实在太大，不少学生感到迷惑不解：函数 $f(x)$ 何来？积分所为何故？“密度”又是何意？不一而足. 以下试图对上述问题从源头上给出彻底明白的解释.

2　定义式溯源

其实，若 X 为离散型随机变量，其分布列为 $P\{X=x_k\}=p_k(k=1,2,\cdots)$，则

$$P\{a\leqslant X\leqslant b\}=\sum_{a\leqslant x_k\leqslant b}p_k.\tag{2}$$

那么，若 X 为连续型随机变量，则其取值为实数轴上的所有实数，不可能一一列举，其分布规律当然不能像离散型随机变量那样用分布列来描述了，故而改用自变量可连续取值的“函数”来描述，$f(x)$ 就应运而生了.

在离散型随机变量的定义式(2)中，“$\sum$”是对 X 落在区间 $[a,b]$ 内的所有可能情形下的概率求和——离散和，而在连续型随机变量的定义式(1)

中,当然不能对一个连续函数求"离散和"了,只能改用积分——连续和.其实,从求和号"$\sum$"和积分号"$\int$"都来自拉丁文"Summation"首字母"S"的系出同源关系,就足以看出从分布列到概率密度是非常自然的延伸和推广了.

3 "密度"溯源

3.1 物理角度

在物理学上,若一段长度为 d 的均匀导线的密度为 ρ,则其质量为 $m=\rho d$.这里的密度指的是线密度,以下简称为密度.由此知,$\rho=\dfrac{m}{d}$,故密度实为单位长度上导线的质量,这就是密度的物理学意义.据此,对于不均匀导线,不难发现有如下结论:

若一段不均匀导线的密度为 $\rho(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,则其质量为 $m=\int_a^b\rho(x)\mathrm{d}x$.

结论的证明可以采用微元法.

证明 如图1所示,在导线上任意截取充分短的一段 AB,其中 A,B 的横坐标分别为 x,$x+\Delta x$,且 Δx 充分小,则由微元法知,导线 AB 段的质量为 $\mathrm{d}m=\rho(x)\mathrm{d}x$.

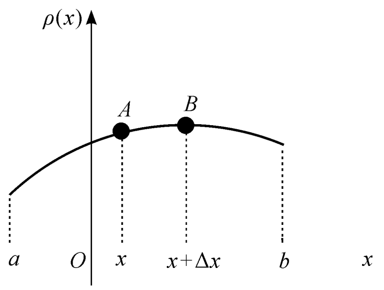

图1 不均匀导线

于是,整段导线的质量为

$$m=\int_{[a,b]}\mathrm{d}m=\int_a^b\rho(x)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

显然,当导线的长度固定时,密度 $\rho(x)$ 的值越大,质量也越大.

据此,由概率密度的定义式(1)知,当区间 $[a,b]$ 固定时,$f(x)$ 的值越大,X 落在区间 $[a,b]$ 上的概率 $P(a\leqslant X\leqslant b)$ 也越大.这与上面对式(3)的解读完全一致.因此,若将概率"$P(a\leqslant X\leqslant b)$"视为"质量",则 $f(x)$ 岂不正是"密度"?!

3.2 数理角度

设 X 为连续型随机变量,其分布函数为 $F(x)(-\infty<x<+\infty)$.给定区间 $[x,x+\Delta x]$,其中 x 为任意实数,区间长度 $\Delta x>0$,则由概率分布函数的定义及连续性知,X 落在区间 $[x,x+\Delta x]$ 内的概率为

$$\begin{aligned}&P\{x\leqslant X\leqslant x+\Delta x\}\\&=P\{X\leqslant x+\Delta x\}-P\{X<x\}\\&=F(x+\Delta x)-F(x).\end{aligned}$$

于是,

$$\frac{P\{x\leqslant X\leqslant x+\Delta x\}}{\Delta x}=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.$$

令 $\Delta x\to 0$,在等号两边取极限,有

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\{x\leqslant X\leqslant x+\Delta x\}}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x).\end{aligned}$$

又分布函数和概率密度的关系为 $F'(x)=f(x)$,故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\{x\leqslant X\leqslant x+\Delta x\}}{\Delta x}=f(x).$$

当 Δx 充分小时,有

$$f(x)\approx\frac{P\{x\leqslant X\leqslant x+\Delta x\}}{\Delta x}. \tag{4}$$

式(4)中等号的右边,分子为 X 落在区间 $[a,b]$ 上的概率,分母为区间长度,比值为 X 落在区间 $[a,b]$ 内单位长度上的概率.联想到3.1中所谓密度的物理学意义,此比值岂不正是"概率"的密度?因此,将 $f(x)$ 称为"概率密度"实在是恰如其分!

3.3 几何角度

由定积分的几何意义知,积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由直线 $x=a$,$x=b$ 和曲线 $y=f(x)$ 所围成的曲边梯形的面积(见图2).因此,式(1)表明:随机变量 X 落入区间 $[a,b]$ 内的概率在数值上等于曲边梯形的面积.

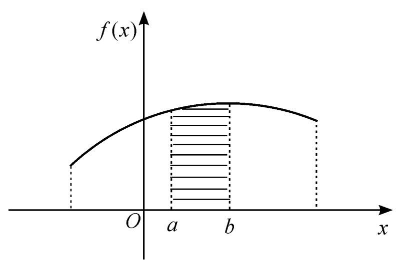

图2 概率密度的几何表示

(下转第47页)

for convex functions[J]. Numer. Algebra Control Optim,2012, 2 (2): 271－278.
[9] 王良成. 凸函数的 Hadamard 不等式的若干推广[J]. 数学的实践与认识,2002,32(6):1027－1030.
[10] 于永新,刘证. 另一个新的与 Hadamard 不等式相关的映射[J]. 纯粹数学与应用数学,2008, 24(3): 547－550.
[11] Dragomir S S, Cho Y J, Kim S S. Inequalities of Hadamard's type for Lipschitzian mappings and their applications[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2000, 245(2): 489－501.
[12] Wang L C. New inequalities of Hadamard's type for Lipschitzian mappings[J]. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2005, 6(2): Article 37.
[13] Yang G S, Hong M C. A note on Hadamard's inequality [J]. Tamkang J. Math. ,1997, 28(1): 33－37.
[14] 李泽妤, 徐美萍, 宋国华. Hermite-Hadamard 不等式的改进[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2008,25 (3): 297－300.
[15] 张小明,褚玉明. 解析不等式新论[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009:139－148,180－184,198－215.
[16] Tseng K L, Hwang S R. New Hermite-Hadamard-type inequalities and their applications[J]. Filomat, 2015, 30(14): 3667－3680.
[17] Fok H K, Vong S W. Generalizations of some Hermite-Hadamard-type inequalities[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2015, 46(3): 359－370.
[18] Dragomir S S, Mcandrew A . Refinements of the Hermite-Hadamard inequality for convex functions [J]. Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 2005, 6(5): Article 140.
[19] Dragomir S S. Further properties of some mappings associated with Hermite-Hadamard inequalities[J]. Tamkang Journal of Mathematics, 2003, 34(1): 45－57.
[20] 王良成, 李素斐. 与 Lipschitz 条件相关的 Hadamard 型的新不等式[J]. 重庆理工大学学报(自然科学), 2011, 25(1): 120－123.
[21] Tseng K L, Hwang S R, Dragomir S S. New Hermite-Hadamard-type inequalities for convex functions (II)[J]. Computers and Mathematics with Applications,2011,62:401－418.
[22] 孙雨竹. 巧用凸函数几何性质解题[J]. 高等数学研究,2018,21(5): 52－53.
[23] 李丹衡,邓远北. 函数的左、右导数的应用[J]. 高等数学研究,1999,2(3):26－28.

(上接第 12 页)

易见,当区间$[a,b]$固定时,$f(x)$的值越大,则曲边梯形的面积也越大,即 X 落入区间$[a,b]$内的概率也越大.

联想到物体的长度、面积、体积固定时,(线、面、体)密度越大,物体的质量也就越大. 因此,概率密度 $f(x)$ 的确有“密度”的意涵.

3.4 测度角度

前文述及的物理角度下的“长度”、几何角度下的“面积”都是测度论中的“测度”. 从测度角度看,概率就是概率空间(X,F,P)中的测度 P,是对形形色色的随机事件发生的可能性的测量;概率密度函数 $f(x)$ 是满足性质

$$P\{X \in A\} = \int_A f(x)\mathrm{d}x$$

的可测函数,其中随机事件 A 是概率空间中的任一可测集,这与式(1)中初等概率论对 $f(x)$的定义是完全吻合的,只不过限于知识水平而把勒贝格积分当作黎曼积分罢了[8].

4 结束语

文献[9]也从平均概率密度的角度给出了概率密度的解释,但广度和深度均略显不足.

本文从多个角度对连续型随机变量的概率密度的概念进行了追根溯源,可以预期不仅能解除读者对概率密度引入目的的疑惑,加深对概率密度概念来源的理解,更能增添概率论乃至整个数学学习的趣味性,可谓一举数得.

本文针对一维连续型随机变量的概率密度进行了诠释,无论研究角度和研究方法,都适用于二维连续型随机变量的概率密度,感兴趣的读者可以自己完成.

参考文献

[1] 陈希孺. 概率论与数理统计[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2002:54－55.
[2] 魏宗舒等. 概率论与数理统计教程[M]. 北京:高等教育出版社,1983:110－112.
[3] 盛骤,谢式千,潘承毅. 概率论与数理统计教程[M]. 北京:高等教育出版社,1989:49－52.
[4] 成世学,严颖,张诒兰. 经济数学基础:概率统计[M]. 北京:中国人民大学出版社,1994:100－104.
[5] 同济大学数学系. 概率论与数理统计[M]. 北京:人民邮电出版社,2017:33－34.
[6] 张天德,叶宏. 概率论与数理统计教程(慕课版)[M]. 北京:人民邮电出版社,2020:40－41.
[7] 郑勋烨. 概率统计导引[M]. 北京:国防工业出版社,2016:57－59.
[8] 程士宏. 测度论与概率论基础[M]. 北京:北京大学出版社,2004:108－115.
[9] 叶利娟. 概率密度函数的引入及概率表示[J]. 湖南工程学院学报. 2019,29(4):54－57.