

理解矩阵特征值与特征向量的经济学视角

魏 轩, 王继强

(山东财经大学 统计与数学学院, 山东 济南 250014)

摘 要 本文分析了一种从经济学角度理解矩阵的特征值与特征向量概念的途径, 希望达到降低理解门槛, 有利于相关专业学科线性代数教学实践的目的.

关键词 特征值; 特征向量; 经济学; 理解

中图分类号 O151.2

文献标识码 A

文章编号 1008-1399(2024)03-0080-02

On Economic Perspective of Understanding Eigenvalues and Eigenvectors

WEI Xuan and WANG Jiqiang

(School of Statistics and Mathematics, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, China)

Abstract This paper explores an approach to comprehend matrix eigenvalues and eigenvectors through an economic lens, aiming to lower the understanding threshold and enhance teaching practices in related professional disciplines.

Keywords eigenvalue, eigenvector, economics, understanding

矩阵的特征值和特征向量是线性代数中的基本概念, 是在行列式、矩阵、向量、线性方程组等知识的基础上建立起来的综合性知识点. 同时, 特征值和特征向量本身也具有多种属性和知识延伸. 这一方面体现出特征值与特征向量在线性代数知识体系中的重要性, 另一方面, 也使得对于初学者, 尤其是人文经管类学科的学生来说, 理解和掌握这一概念有不小的难度. “教”与“学”两个方面, 均在呼唤一种更直观、通俗的特征值与特征向量的理解方式.

本文针对这一问题给出了一种从人文经管类学科学生的专业背景出发, 理解特征值和特征向量的方法, 供同行们参考.

为了在教学中降低学生的理解门槛, 有同行提出了特征值与特征向量的几何意义教学法^[1]. 但这种理解方式讲授时需占用较多时间, 与目前大学线性代数的以计算为主的体系脱节. 最重要的是, 对于

人文经管类学科的学生来说, 几何直观的特征值与特征向量解释仍然是一种难度较大的理解方式, 且与其专业背景知识相去较远.

因此本文认为应该针对这一问题探索一种更通俗的, 或者说更便于人文经管类学生理解特征值与特征向量的途径.

笔者首先发现, 在知乎^[2]、人大经济论坛^[3]等互联网平台上, 这一问题被提出讨论多次, 但未见高质量的回应. 在中国知网、谷歌学术等中英文学术平台的教学问题研究中, 这一问题仍鲜有涉及. 在经济数学^[4]、数量经济学^[5]等专业类的数学教材中, 也未见到对特征值与特征向量的通俗经济学解释. 只有在计量经济学^[6]等教材中, 才有部分模型中使用到了矩阵的特征值和特征向量, 但明显属于知识的应用而非利于初学者的理解. 这说明该问题是一个群众呼声很高, 但在教学研究中仍未有成型解决方案的问题.

为此本研究提出如下特征值与特征向量的理解方案:

首先, 在经典经济学增长理论中, 土地 (包括实际使用的土地面积和自然、矿产资源) 和劳动力被认为是基础的生产要素, 即任何高度结构化的产品,

收稿日期: 2022-05-13

修改日期: 2023-12-11

基金项目: 山东省社会科学规划研究项目(23DTJ01).

作者简介: 魏轩 (1990-), 男, 山东济宁人, 博士, 讲师, 研究方向为数据科学与技术创新, Email: weixuan@sdufe.edu.cn;
王继强 (1976-), 男, 山东枣庄人, 博士, 教授, 研究方向为大学数学教学和研究.

都是由一系列中间产品构成的, 而所有中间产品最终都可以归结到土地和劳动力这两个要素之中^[7]. 这意味着所有产品所包含的内容均为土地和劳动力的线性组合. 假设一单位的土地和一个工时的劳动力价值均为 1, 则形成了两个基本单位向量

$$T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其它所有产品的价值 P 均为这两个向量的线性组合, 即

$$P = aT + bL = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (2)$$

我们不妨将式子中的 $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$ 称为产品的价值结构向量, 其中的第一个维度捕捉了一单位该产品包含的劳动力价值 a , 第二个维度捕捉了一单位该产品包含的土地价值 b .

后来, 经济学家又发现, 除了土地和劳动力, 其实还有另外一种基本生产要素, 通常称为技术进步, 企业家精神, 或者创新, 这种生产要素并不简单形成一个新的基本向量, 而是使原有的土地、劳动力的基本价值向量发生改变, 使其发生组合效应^[8]. 如, 技术提升使土地中融入了智慧, 相当于土地向量 T ($\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T$) 的第二维度组合进了若干单位劳动力要素; 劳动力要素中融入了工具, 相当于劳动力向量 L ($\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T$) 的第一维度中组合进了若干单位土地要素, 同时, 二者的原维度的价值也获得提升. 进而改变了所有产品的价值构成, 且原有的单位向量中的土地价值和劳动力价值也产生了创新价值提升作用.

如, 一种可能的情况是在技术进步的作用下, 土地和劳动力的基本单位向量被改变为:

$$\begin{aligned} T &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{土地中融入智慧}} \hat{T} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ L &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{劳动中融入工具}} \hat{L} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

那么, 在新的技术水平下, 技术进步之前使用一单位 T 和一单位 L 的某产品在技术进步后的价值就发生了如下转变

$$\begin{aligned} \hat{P} &= 1 * \hat{T} + 1 * \hat{L} = 1 * \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

这时, 我们发现了两个有趣的规律:

(1) 一个产品的价值向量 P 总是等于土地和劳动力的基本单位向量列矩阵 $(T, L)^T$ 与该产品使用

的两种要素数量向量的积;

(2) 在技术水平进步以后, 要素价值结构向量为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ 的产品的价值结构向量变为 $\begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix}^T$, 存在一个倍数关系.

那么, 是不是任何一个技术进步之前的产品价值结构在发生技术进步之后的产品价值结构均存在这种倍数关系呢? 我们再举一例:

$$\begin{aligned} \hat{P} &= 1 * \hat{T} + 2 * \hat{L} = 1 * \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 * \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

可见, 并非所有产品都存在技术进步以后的价值结构是原价值结构倍数的关系.

综上所述, 如果我们将基本单位向量矩阵记为一个一般的矩阵 A (不妨称为经济的基矩阵), 一个产品的价值结构向量记为 α , 发生价值转变后的可能存在的倍数为 λ , 那么, 存在这种倍数关系时, 就可以简单记为

$$A\alpha = \lambda\alpha \quad (5)$$

在这个式子中, 价值结构向量转变的倍数 λ 就称为技术进步以后的基矩阵 A 的特征值, α 称为矩阵 A 对应于特征值 λ 的特征向量.

这种理解特征值和特征向量的方式有利于相关专业的学生在学到相关课程时引起思考. 例如: 在技术经济学中有一个经典的例子, 爱迪生发明出可量产的白炽灯时, 假设每生产 100 个白炽灯的使用的土地和劳动力的价值分别为 1, 1; 到了 20 世纪 90 年代, 人类已经逐渐淘汰白炽灯, 开始广泛使用 LED 灯, 假设每生产 100 个 LED 灯需要的与白炽灯时期的等价土地和工时分别为 4 和 4. 学生在学到类似内容时就可以联想到, 白炽灯到 LED 的价值结构向量发生的是成比例变动, 其中存在特征值和特征向量的关系.

线性代数在现代科学中的应用十分广泛, 但在举例说明时往往以理工学科背景知识为主, 其实包括特征值与特征向量在内的线性代数知识中也蕴含着丰富的经济学本质. 在相关专业学生的教学中如能结合其背景知识举例讲解, 将有利于提高学生的学习兴趣, 优化教学效果.

参考文献

- [1] 雍龙泉. 矩阵特征值与特征向量的几何意义[J]. 陕西理工大学学报(自然科学版), 2021, 37(05): 80—85.

(下转第 86 页)

学号	学生视频完成率	发布习题个数	学生提交习题数	学生作答率	学生得分率 ①
2021010403	0.0%	233	119	51.0%	24.0%
2021010384	0.0%	233	23	10.0%	50.0%
2021010407	0.0%	233	34	15.0%	52.0%
2021010444	0.0%	233	37	16.0%	58.0%
2021010425	0.0%	233	36	15.0%	36.0%
2021010431	0.0%	233	154	66.0%	42.0%
2021010521	0.0%	233	47	20.0%	32.0%
2021010450	0.0%	233	29	12.0%	18.0%
2021010372	0.0%	233	89	38.0%	23.0%
2021010491	0.0%	233	130	56.0%	64.0%

I 教学数据统计

• 课堂

44 76h37min 1282 6696 95.0%

开课次数 总课时 使用PPT(页) 师生互动人次 ① 整体到课率 ②

• 课堂直播

15 23h39min 2377 80

开启直播(次) 累计直播时长 累计参与人次 观看回放人数

图 1 2021 级化工类部分教学数据

参考文献

- [1] 吴岩. 建设中国“金课”[J]. 中国大学教学, 2018, (12), 4—9.
- [2] 刘宝胜, 任晓霞, 赵新新, 闫晓燕, 赵菲. 基于“两性一度”的云课堂教学设计与实践——以材料科学基础课程为例[J]. 中国现代教育装备, 2021, (17), 81—83.
- [3] 张煜, 刘梦兰, 马杰. 基于建构主义的物流工程专业课程混合教学模式探索[J]. 黑龙江教育(高教研究与评估), 2021, (9), 57—59.
- [4] 张永民, 樊晔, 刘雪峰, 胡学一, 方云. “两性一度”教学

要求下的物理化学综合实验教学探索——以无表面活性剂微乳的构筑及应用为例[J]. 大学化学, 2021, 36, 1—8.

- [5] 宋专茂, 刘荣华. 课程教学“两性一度”的操作性分析[J]. 教育理论与实践, 2021, (41), 48—51.
- [6] Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., & Krathwohl, D. R. Taxonomy of Educational Objectives, Handbook I: The Cognitive Domain[M]. New York: David McKay Co Inc, 1956.
- [7] E. Crawley, J. Malmqvist, S. Ostlund, D. R. Brodeur. 重新认识工程教育——国际 CDIO 培养模式与方法[M]. (顾佩华, 沈民奋, 陆小华 译). 高等教育出版社, 2009.
- [8] 梁正平, 明仲, 纪震. 基于 CDIO 的“Linux 操作系统”应用实践教学探讨[J]. 高等理科教育, 2011, (6), 139—142.
- [9] 钟寿仙, 张瑛, 郭绍辉. MPC-CDIO 教育教学模式的探索与实践[J]. 高等工程教育, 2015, (2), 169—175.
- [10] 宋专茂, 江波. 课程教学“两性一度”评价的指标建构与实施方法探索[J]. 上海教育评估研究, 2021, (2), 62—67.

(上接第 81 页)

- [2] 知乎: 特征值和特征向量的具体用途有哪些?

https://www.zhihu.com/question/20382971?utm_source=wechat_session&utm_medium=social&utm_oai=1435363247868669953&utm_content=group1_supplementQuestions&utm_campaign=shareopen, 2012.

- [3] 人大经济论坛: [学科前沿] 特征值和特征向量的经济学意义及应用. <https://bbs.pinggu.org/thread-203215-2-1.html>, 2010.

- [4] 迈克尔·霍伊. 经济数学[M]. 3 版. 北京: 中国人民大学出版社, 2015.
- [5] 刘新建. 高等数量经济学[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
- [6] 李子奈, 潘文卿. 计量经济学[M]. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2020.
- [7] 约瑟夫·熊彼特. 经济发展理论[M]. 上海: 立信会计出版社, 2017.
- [8] P. M. Romer, Endogenous technological change[J]. Journal of Political Economy 1990(98): S71—S102.