

一道不等式的五种证明方法

刘纪芹, 郝秀梅

(山东财经大学数学与数量经济学院, 山东 济南 250014)

摘 要 本文利用数学归纳法、函数的凹凸性、函数的单调性、函数的极值、多元函数的条件极值这五种方法对不等式 $\frac{x^n+y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ (其中 $n \geq 1$ 的整数, $x \geq 0, y \geq 0$) 进行了证明.

关键词 数学归纳法; 函数凹凸性; 单调性; 极值; 条件极值

中图分类号 O172 **文献标识码** A **文章编号** 1008-1399(2020)03-0023-03

Five Different Proofs for an Inequality

LIU Jiqin and HAO Xiumei

(School of Mathematics and Quantitative Economics, Shandong University of Finance and Economics, Jinan, Shandong, 250014, PRC)

Abstract In this paper, five methods, such as mathematical induction, the use of the concavity and convexity, monotonicity, extreme value and conditional extreme value, are used to prove the inequality $\frac{x^n+y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ (here n is an integer and $n \geq 1, x \geq 0, y \geq 0$).

Keywords mathematical induction, concavity and convexity, monotonicity, extreme value, conditional extreme value

1 问题的提出

不等式证明是学习高等数学时经常遇到的一种重要题型,而不等式的证明方法灵活多样,技巧性强. 通过学习不等式的多种证明方法,可以更好地加强初学者对不等式证明方法的了解,进一步加强高等数学中相关知识的理解. 下面给出如下不等式:

若 $n \geq 1$ 且 n 为整数, $x \geq 0, y \geq 0$, 证明:

$$\frac{x^n+y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

2 不等式的五种证明方法

(1) 数学归纳法证明不等式

证明 当 $n=1$ 时, 左 = $\frac{x+y}{2}$, 右 = $\frac{x+y}{2}$, 故左 = 右, 不等式中的等号成立.

当 $n=2$ 时, 右 = $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{x^2+y^2+2xy}{4}$, 又因为 $2xy \leq x^2+y^2$, 所以

$$\text{右} \leq \frac{x^2+y^2+x^2+y^2}{4} = \frac{x^2+y^2}{2} = \text{左},$$

故当 $n=1, n=2$ 时, 结论都成立.

设 $n=k$ 时结论成立, 即 $\frac{x^k+y^k}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^k$. 下面考察 $n=k+1$ 的情况.

收稿日期: 2019-10-08

修改日期: 2019-12-09

基金项目: 山东省研究生教育创新计划项目(SDY15061)

作者简介: 刘纪芹(1968-), 女, 山东日照人, 博士, 教授, 研究方向:

粗系统理论与应用, Email: sdfiljq@126.com.

$$\begin{aligned} \text{右} &= \left(\frac{x+y}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^k \cdot \frac{x+y}{2} \\ &\leq \frac{x^k+y^k}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \\ &= \frac{(x^{k+1}+y^{k+1})+(xy^k+x^ky)}{4}. \end{aligned}$$

又因为 $x \geq 0, y \geq 0$, 从而有

$$\begin{aligned} \frac{x^{k+1}+y^{k+1}}{4} - \frac{xy^k+x^ky}{4} &= \frac{(x-y)(x^k-y^k)}{4} \\ &= \frac{(x-y)^2(x^{k-1}+x^{k-2}y+\cdots+xy^{k-2}+y^{k-1})}{4} \geq 0, \end{aligned}$$

即
$$\frac{x^{k+1}+y^{k+1}}{4} \geq \frac{xy^k+x^ky}{4}.$$

故

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+y}{2}\right)^{k+1} &\leq \frac{x^{k+1}+y^{k+1}}{4} + \frac{xy^k+x^ky}{4} \\ &\leq \frac{x^{k+1}+y^{k+1}}{4} + \frac{x^{k+1}+y^{k+1}}{4} = \frac{x^{k+1}+y^{k+1}}{2}. \end{aligned}$$

从而 $n=k+1$ 时结论成立. 由数学归纳法知, 对所有 $n \geq 1$ 的整数, $x \geq 0, y \geq 0$, 均有

$$\frac{x^n+y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(2) 应用函数的凹凸性证明不等式

证明思路 由曲线凹凸性概念^[1-2]知, 若曲线 $f(x)$ 在区间 I 上是凹的, 则对任意实数 $x, y \in I$, 总有 $\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$. 因此, 如果所证明的不等式中含有两点函数值之和 $f(x)+f(y)$ 的形式时, 常常考虑用函数的凹凸性证明. 本文要证的不等式符合此情况, 故考虑用函数的凹凸性证明. 由所证不等式形式, 显然假设函数 $f(x)=x^n$, 然后判断 $f(x)=x^n$ 在 $(0, +\infty)$ 上的凹凸性, 从而利用凹凸性的定义证明该不等式.

证明 令 $f(x)=x^n$, 则 $f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$. 因为当 $x \in (0, +\infty), n > 1$ 时, $f''(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 为凹函数, 由凹函数的概念^[1-3]可知, 对任意实数 $x, y \in (0, +\infty)$ 及实数 $\lambda = \frac{1}{2} \in (0, 1)$, 总有

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

即
$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^n \leq \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{2}y^n,$$

亦即

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n+y^n}{2} \quad (n > 1, x > 0, y > 0).$$

容易验证当 $n=1$ 或 $x=0$ 或 $y=0$ 时, 该不等式均成立. 故对所有的 $n \geq 1, x \geq 0, y \geq 0$, 均有

$$\frac{x^n+y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(3) 应用函数的单调性证明不等式

证明思路 一元函数单调性的一个重要应用是证明不等式^[1-3]. 但本文中要证明的不等式涉及两个变量 x, y , 无法直接利用一元函数单调性证明. 但若暂时固定 $y=y_0 \geq 0$, 则相当于证明不等式

$$\frac{x^n+y_0^n}{2} \geq \left(\frac{x+y_0}{2}\right)^n,$$

此时该不等式可看作只含一个变量 x , 故可考虑利用一元函数的单调性证明. 将此不等式整理成 $f(x) \geq 0$ 形式, 自然设出应用单调性的函数为

$$f(x) = \frac{x^n+y_0^n}{2} - \left(\frac{x+y_0}{2}\right)^n.$$

然后利用 $f(x)$ 的单调性证明不等式

$$\frac{x^n+y_0^n}{2} \geq \left(\frac{x+y_0}{2}\right)^n,$$

最后利用 y_0 的任意性, 从而证明出本文中的不等式.

证明 对任意固定的 $y_0 \geq 0$, 令

$$f(x) = \frac{x^n+y_0^n}{2} - \left(\frac{x+y_0}{2}\right)^n,$$

则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{n}{2}x^{n-1} - n\left(\frac{x+y_0}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{n}{2}\left[x^{n-1} - \left(\frac{x+y_0}{2}\right)^{n-1}\right], \end{aligned}$$

I. 当 $x \geq y_0 \geq 0$ 时, $x \geq \frac{x+y_0}{2}$, 则

$$x^{n-1} \geq \left(\frac{x+y_0}{2}\right)^{n-1},$$

从而 $f'(x) \geq 0$, 故 $f(x)$ 单调上升, 从而有 $f(x) \geq f(y_0)$, 又

$$f(y_0) = \frac{y_0^n+y_0^n}{2} - \left(\frac{y_0+y_0}{2}\right)^n = 0,$$

则有

$$\frac{x^n+y_0^n}{2} \geq \left(\frac{x+y_0}{2}\right)^n.$$

II. 当 $0 \leq x < y_0$ 时, $x < \frac{x+y_0}{2}$, 则

$$x^{n-1} < \left(\frac{x+y_0}{2}\right)^{n-1},$$

从而 $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 单调下降, 从而有 $f(x) > f(y_0) = 0$, 故有

$$\frac{x^n + y_0^n}{2} > \left(\frac{x+y_0}{2}\right)^n.$$

综上所述, 对所有的 $x \geq 0$, 均有

$$\frac{x^n + y_0^n}{2} \geq \left(\frac{x+y_0}{2}\right)^n.$$

又因为 y_0 是任意的, 从而对所有的 $x \geq 0, y \geq 0$, 有

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(4) 应用函数的极值证明不等式

证明思路 因为本文中要证的不等式等价于

$$\frac{x^n + y^n}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \geq 0,$$

该不等式涉及两个变量 x, y , 因此可考虑利用二元函数的极(最)值证明上面不等式, 从而问题转化为证明二元函数

$$f(x, y) = \frac{x^n + y^n}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

在 $x \geq 0, y \geq 0$ 时的最小值非负, 因此利用二元函数求最(极)值的方法即可证明该不等式.

证明 考虑函数

$$f(x, y) = \frac{x^n + y^n}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x \geq 0, y \geq 0),$$

只要证明此函数在第一象限内最小值为零即可. 因为

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = \frac{nx^{n-1}}{2} - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right)^{n-1} = 0, \\ f'_y(x, y) = \frac{ny^{n-1}}{2} - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right)^{n-1} = 0, \end{cases}$$

解得 $x = y$, 因此下面比较 $f(x, x), f(x, 0), f(0, y)$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y), \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y)$ 的值的大小. 因为

$$f(x, x) = 0,$$

$$f(x, 0) = \frac{x^n}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)^n \geq 0,$$

$$f(0, y) = \frac{y^n}{2} - \left(\frac{y}{2}\right)^n \geq 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{y^n}{2} + x^n \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1+\frac{y}{x}}{2} \right)^n \right) \right],$$

因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+\frac{y}{x}}{2} \right)^n = \left(\frac{1}{2} \right)^n$, 而 $n \geq 1$, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y) \geq 0$,

同理 $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) \geq 0$. 故对所有的 $x \geq 0, y \geq 0$, 有 $f(x, y) \geq 0$, 即

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

(5) 应用函数的条件极值证明不等式

证明思路 对于不等式 $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$, 实际

上没有等式约束条件, 但若引入约束条件 $\frac{x+y}{2} = c$, 则

该不等式的证明问题转化为在该约束条件下证明

$f(x, y) = \frac{x^n + y^n}{2}$ 的极(最)小值为 c^n . 而求二元函

数 $f(x, y) = \frac{x^n + y^n}{2}$ 在条件 $\frac{x+y}{2} = c$ 下的极值还是

比较容易的. 这种思想方法为我们提供了一种新的且较简单的证明不等式的方法.

证明 任意固定 $x_0 \geq 0, y_0 \geq 0$, 记 $\frac{x_0 + y_0}{2} = c$, 现

在考虑 $f(x, y) = \frac{x^n + y^n}{2}$ 在条件 $\frac{x+y}{2} = c$ 下的极值.

构造拉格朗日函数

$$L(x, y, \lambda) = \frac{x^n + y^n}{2} + \lambda \left(\frac{x+y}{2} - c \right),$$

则有

$$\begin{cases} L'_x = \frac{nx^{n-1}}{2} + \frac{\lambda}{2} = 0, \\ L'_y = \frac{ny^{n-1}}{2} + \frac{\lambda}{2} = 0, \\ L'_\lambda = \frac{x+y}{2} - c = 0, \end{cases}$$

解得 $x = c, y = c$. 又 $f(c, c) = \frac{c^n + c^n}{2} = c^n$. 考虑边界上的点

$$f(2c, 0) = \frac{(2c)^n}{2} = 2^{n-1}c^n \geq c^n,$$

同理 $f(0, 2c) \geq c^n$. 又点 (c, c) 是唯一的驻点, 故点 (c, c) 是函数 $f(x, y)$ 的最小值点, 从而

$$f(x, y) \geq f(c, c) = c^n.$$

则

$$f(x_0, y_0) = \frac{x_0^n + y_0^n}{2} \geq c^n = \left(\frac{x_0 + y_0}{2}\right)^n.$$

(下转第 48 页)

则(1)式极限也为0^{[4][5]}.

这里需要注意的是,若直接构造如下形式的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$,在收敛域 $[0, \pi/2 - \epsilon]$ 内计算得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \frac{1}{1-\sin x} dx \quad (3)$$

$$= \left[\tan x + \frac{1}{\cos x} \right]_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon}$$

但 $\epsilon \rightarrow 0_+$ 时该积分发散,方法失效.

相较而言,以上方法简单易行.特别地,对积分上限的调整给我们带来不小的启发.事实上,对于积分式求极限,大家最容易想到的就是利用积分中值定理去掉积分号,即必存在 $\xi \in (0, \pi/2)$,使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \xi \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

对吗?肯定不对.这里 ξ 的取值应是和 n 有关的,且可能有 $\xi_n \rightarrow \pi/2$,以上极限不再是0而是 1^∞ 不定型极限.产生错误的原因同样是积分上限.因此对积分上限做出调整后可以得到以下计算方法:

法1 被积函数仅在积分上限处函数值取1,从而影响极限的存在,假设 $\forall \epsilon \in (0, \pi/2)$,存在 $\xi_n \in (0, \pi/2 - \epsilon)$,使得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \sin^n x dx = \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon \right) \sin^n \xi_n \quad (4)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \sin^n x dx \leq \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon \right) \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon \right) \rightarrow 0$$

由于 ϵ 的任意性,可知原极限为0.

法2 既然三角函数 $\sin x$ 在 $(0, \pi/2)$ 内单调递增,我们尝试用积分的单调性来完成计算,所求极限的积分式我们简记为 I ,则有

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\epsilon} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\epsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad (5)$$

由被积函数的单调性可得

$$I \leq \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon \right) \cdot \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon \right) + \epsilon$$

显然右端在 n 趋于无穷大时极限为0,利用夹逼准则,原式极限为0.

3 结论

本文给出了一种利用级数收敛的必要条件求极限的方法,只有在级数的一致收敛区间内才可交换求积分与求和的顺序,且对积分上限处理后,仍可用积分中值定理去掉积分号.

参考文献

- [1] 张国铭. 若干个数列之间的联系及其极限[J]. 高等数学研究, 2009, 12(5): 34-38.
- [2] 杨天虎, 岳志明. 两个极限相等的有趣数列[J]. 大学数学, 2016, 32(1): 101-104.
- [3] 黄永忠, 刘继成. 与 Wallis 不等式有关的两个数列的单调性[J]. 大学数学, 2016, 32(5): 76-80.
- [4] 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程(第二卷)第二分册[M]. 北京大学高等数学教研室译, 北京: 人民教育出版社, 1978.
- [5] 孙涛. 数学分析经典例题解析[J]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 255-256.

(上接第25页)

又因为 x_0, y_0 是任意的,故对 $x \geq 0, y \geq 0$,有

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^n.$$

说明 除了第一种证明方法要求 n 为正整数,其它四种证明方法均没用到 n 为正整数这一条件,所以对后面的四种证明方法,不等式中的条件可以放宽,即可去掉“ $n \geq 1$ 整数”这一条件.

3 小结

不等式的证明不仅是高等数学的重要内容,而且各种类型的不等式在现代数学的各个分支及实际应用中起着十分重要的作用.本文对一道不等式证

明问题给出了多种不同的证明方法,这些都是重要的数学思想与方法,这些方法为证明不等式提供了一些借鉴.通过这些方法的学习,可以加强学生对高等数学中相关知识的理解与掌握,从而进一步提高学生创新能力与发散思维能力.对同一问题找出不同的证明方法,这对于数学思想的培养和应用知识能力的提高都是很有意义的.

参考文献

- [1] 刘太琳, 孟宪萌, 黄秋灵. 微积分[M]. 3版. 北京: 经济科学出版社, 2017.
- [2] 同济大学数学系. 高等数学(上册)[M]. 7版. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [3] 华东师范大学数学系. 数学分析(上册)[M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2010.