第 24 卷 第 5 期
2021 年 9 月
高 等 数 学 研 究
STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS
Vol. 24, No. 5
Sep., 2021

doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2021.05.014

和式、幂指式、阶乘式数列的极限

孙向勇

（山东财经大学 数学与数量经济学院，山东 济南 250014）

摘　要　本文利用单调有界性，夹逼定理，积分，级数，海涅定理，斯特林公式，沃利斯公式讨论了有关和式，幂指式，阶乘式数列的极限，并举例说明.

关键词　数列；极限；和式；幂指式；阶乘式

中图分类号　O172　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008－1399(2021)05－0037－05

Limits of Sums, Powers, and Factorials

SUN Xiangyong

(School of Mathematics and Quantitative Economics, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, China)

Abstract　In this paper, the limits of sums, powers, factorials are discussed with the used of the monotonicity, squeeze theorem, integral, series, Heine theorem, Stirling formula, and Wallis formula. Some examples are given.

Keywords　sequence, limit, sum, power, factorial

数列的收敛与发散是高等数学学习中的一个主要内容，有关和式（无穷多项的代数和）、幂指式（幂和指数都是 n 的变量）、阶乘式（关于 $n!$ 的变量），或其混合运算的极限是学习中的难点，本文通过举例说明求解的一些思路方法.

1　利用单调有界性讨论和式极限

如果一个数列单调递增有上界，或单调递减有下界，那么该数列收敛. 此方法的局限是只能证明数列的极限存在，求出极限还需要另行方法.

一般和式数列的单调性，可以利用“相减法”讨论. 有界性的讨论，可以观察项的规律，并借助不等式放大或缩小到上下界. 在学习中可以积累一些常用的不等式，如对 $x\in R$ 都有 $1+x\leqslant e^x$，对 $x>-1$ 都有 $x\geqslant\ln(1+x)$ 等. 变换后又能得到一些不等式，如令 $(-x)>(-1)$ 有 $(-x)\geqslant\ln(1-x)$，即 $x<1$ 时 $x\leqslant-\ln(1-x)$ 等.

例 1　判定数列 $\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n}\mid n=1,2,\cdots\}$ 的敛散性.

解　设 $a_n=(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n})$，又 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{2}{3n+3}>0$，并且 $a_n=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{3n}\leqslant\frac{2n}{n+1}<2$，所以该数列单调递增有上界，从而收敛.

例 2　判定数列 $\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\mid n=1,2,\cdots\}$ 的敛散性.

分析　观察曲线 $y=x$ 与 $y=\ln(1+x)$，$y=-\ln(1-x)$ 在原点的图像关系，对 $\frac{1}{n}$ 进行放大和缩

收稿日期：2020－09－16　　修改日期：2021－07－12

基金项目：山东省教育科学“十三五”规划重点课题(2020ZD017)，山东财经大学 2020 课程思政示范课程培育项目(20200045).

作者简介：孙向勇(1971－)，女，济南，硕士，副教授，研究图论及应用，教育科学，Email:20018234@sdufe.edu.cn.

小. 即利用不等式，当 $-1<x<1$ 时，$\ln(x+1)<x<-\ln(1-x)$.

解　设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，则 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-[\ln(n+1)-\ln n]$，利用微分中值定理，$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-[\ln(n+1)-\ln n]=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{\xi}<0$，$(n<\xi<n+1)$，所以数列 $\{a_n\}$ 单调递减，又当 $-1<x<1$ 时，$\ln(x+1)<x<-\ln(1-x)$，所以

$$\ln\frac{3}{2}<\frac{1}{2}<-\ln\frac{1}{2},$$

$$\ln\frac{4}{3}<\frac{1}{3}<-\ln\frac{2}{3},$$

$$\cdots$$

从而

$$1+\ln\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)-\ln n<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n<1-\ln\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\right)-\ln n \tag{1}$$

即

$$0.307\approx 1-\ln 2<1+\ln\frac{n+1}{2n}<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n<1,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 单调有界从而收敛.

注　极限值 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$，称为欧拉常数. 至今还未明确它是多少，是有理数还是无理数. 文献[1]也用几种方法证明了其收敛性. 但是本例的方法，可以通过调整(1)式，获得上下界，并提高精度. 比如从 $\frac{1}{3}$ 开始使用不等式，则

$$1+\frac{1}{2}+\ln\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)-\ln n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n<1+\frac{1}{2}-\ln\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\right)-\ln n$$

即

$$0.401\approx\frac{3}{2}-\ln 3<\frac{3}{2}+\ln\frac{n+1}{3n}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n<\frac{3}{2}-\ln 2\approx 0.807,$$

可见，精度提高很大.

2　利用夹逼定理求和式极限

当遇到一个和式数列，其和难以求解时，可以考虑夹逼定理. 夹逼定理即，如果 $c_n\leqslant a_n\leqslant b_n$，$(n=k,k+1,\cdots k\in N_+)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 应用的难点是收放不等式，要恰好使得放大和缩小的两边变量的极限存在且相等. 有些题目，通过观察项的规律容易找到恰当地两边变量，如 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}=1$；有些题目难度大技巧强，但还是围绕项的特点收放不等式，如下例.

例 3　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2^n+\cdots+n^n}{n^n}$.

解　因为

$$\frac{1+2^n+\cdots+n^n}{n^n}=\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^n+\left(1-\frac{n-2}{n}\right)^n+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)^n+1,$$

利用不等式，对 $x\in R$ 都有 $1+x\leqslant e^x$，放大上述变量. 同时对任意小于 n 的正整数 k 保留有限项，缩小上述变量. 从而

$$\left[1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^n+\cdots+\left(1-\frac{k}{n}\right)^n\right]\leqslant\frac{1+2^n+\cdots+n^n}{n^n}\leqslant\left[e^{-(n-1)}+e^{-(n-2)}+\cdots+e^{-1}+1\right],$$

对上述不等式同时取极限，令 $n\to\infty$，可得到

$$1+e^{-1}+\cdots+e^{-k}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^n+\cdots+n^n}{n^n}\leqslant\frac{e}{e-1}.$$

再令 $k\to\infty$，由夹逼定理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^n+\cdots+n^n}{n^n}=\frac{e}{e-1}.$$

3　利用积分的定义求和式极限

利用积分的定义可求和式数列的极限. 若函数 $f(x)$ 在 $[0,m]$ 上可积，或在 $(0,m]$ 上广义积分存在，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{m\cdot n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^m f(x)\,dx$. 最常应用 $m=1$ 的公式.

利用积分定义求解和式极限的思路是，观察每一项是否能够变形为 $\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ 形式，整个和式变形

为“积分和”$\sum_{k=1}^{m\cdot n}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})$的形式. 注意对 k 求和时，如果 k 从 $1,2,\cdots,m\cdot n$，则这个和式的极限为 $f(x)$ 在$[0,m]$上的积分. 即在区间$[0,m]$上分割为 $m\cdot n$ 个宽度为$\frac{1}{n}$的区间，然后取分割点处的函数值、做和式、令 $n\to\infty$取极限的结论.

例 4　求$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1+n^3}{n^2+n^4}+\frac{2^3+n^3}{(2n)^2+n^4}+\frac{3^3+n^3}{(3n)^2+n^4}+\cdots+\frac{n^3+n^3}{n^4+n^4}]$.

分析　每一项提出$\frac{1}{n}$，剩余部分变形为$\frac{k}{n}$的函数，即$\frac{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$，$k$ 恰好从 $1,2,\cdots,1\cdot n$. 所以这个和式的极限为$\frac{1+x^3}{1+x^2}$在$[0,1]$上的积分.

解

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1^2}{n^2}}+\frac{1+\frac{2^3}{n^3}}{1+\frac{2^2}{n^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{n^3}{n^3}}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1+\frac{k^3}{n^3}}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

$$=\int_0^1\frac{1+x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln2.$$

例 5　求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$.

分析　经恒等变形，对含阶乘的变量取对数后化为和式，再利用定积分求解.

解　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n^n n!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln[\frac{1}{n^n}\cdot\frac{(2n)!}{n!}]}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})}=\mathrm{e}^{\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}x}$$

$$=\mathrm{e}^{2\ln2-1}=\frac{4}{\mathrm{e}}.$$

注　利用定积分也易求出例 1 的极限，即

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{2n}{n}})$$

$$=\int_0^2\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln3.$$

此外，利用夹逼定理与定积分可以求解更复杂的一类和式极限[2]，如$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\sqrt{k}}=\frac{2}{\pi}$.

4　利用级数讨论和式极限

假设要讨论数列$\{U_n\}$敛散性，考虑构造一个常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，使得$U_n=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+V_n\xlongequal{记作}S_n+V_n$，其中$\lim\limits_{n\to\infty}V_n$存在. 这样讨论数列$\{U_n\}$的敛散性就等价于讨论构造级数的敛散性.

此外，在构造级数时，也可以通过常见函数的幂级数展开式如 $\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,x\in R$ 等，找出幂级数的收敛点与对应数列的关系，然后求出和式数列极限. 构造级数的思路有直接和间接两种，举例说明如下.

例 6　判定数列$\{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\ln\sqrt{n}\mid n=1,2,\cdots\}$的敛散性.

分析　注意到

$$\ln\sqrt{n}=\ln(\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}}\cdot\cdots\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}),$$

可以分解为$(n-1)$项的和，再与前$(n-1)$项配对，构造出一个级数的部分和. 由于剩余项$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$，从而该数列的敛散性取决于构造级数的敛散性.

解　$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\ln\sqrt{n}$

$$=[1-\ln\sqrt{2}]+[\frac{1}{\sqrt{2}}-\ln\sqrt{(1+\frac{1}{2})}]+\cdots+[\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\ln\sqrt{(1+\frac{1}{n-1})}]+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\xlongequal{记作}S_{n-1}+\frac{1}{\sqrt{n}},$$

构造正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{\sqrt{n}}-\ln\sqrt{(1+\frac{1}{n})}]$. 利用$\lim\limits_{x\to0}\frac{[x-\ln\sqrt{(1+x^2)}]}{x}=1$和海涅定理，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[\frac{1}{\sqrt{n}}-\ln\sqrt{(1+\frac{1}{n})}]}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$，所以该级数与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}$

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ 敛散性一致即发散. 从而数列 $\{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\ln\sqrt{n} \mid n=1,2,\cdots\}$ 发散.

注 例2也可以采用这种方法判定收敛,但无法确定上下界. 判定过程如下.

解 因为 $\ln n=\ln(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1})$,

所以

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\\
&=[1-\ln 2]+[\frac{1}{2}-\ln(1+\frac{1}{2})]+\cdots\\
&\quad+[\frac{1}{n-1}-\ln(1+\frac{1}{n-1}))]+\frac{1}{n}\\
&\xlongequal{\text{记作}} S_{n-1}+\frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

构造正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]$,因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$,所以该级数与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 敛散性一致即收敛. 从而数列 $\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \mid n=1,2,\cdots\}$ 收敛.

例7 设 $a_n=\frac{1}{2!}+\frac{3}{3!}+\cdots+\frac{2n-1}{(n+1)!}$, 求 $\lim_{n\to\infty}a_n$.

解 设 $b_n=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$, $c_n=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}$, 则 $a_n=2b_n-c_n$. 由 e^x 的幂级数展开式

$$
e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad x\in R
$$

令 $x=1$ 代入上式,可得 $\lim_{n\to\infty}c_n=e-2$. 设 $x\neq 0$,

$$
\frac{d}{dx}(\frac{e^x-1}{x})=\frac{1}{2!}+\frac{2x}{3!}+\cdots+\frac{(n-1)x^{n-2}}{n!}+\cdots,
$$

$$
\frac{d}{dx}(\frac{e^x-1}{x})=\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2},
$$

令 $x=1$ 代入上式, 可得 $\lim_{n\to\infty}b_n=1$. 从而 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(2b_n-c_n)=4-e$.

5 利用海涅定理求幂指式极限

一般幂指式数列的极限相对复杂,但是利用反映函数极限与数列极限关系的海涅定理,却容易求解. 海涅定理即 $\lim_{x\to x_0}f(x)=a$ 充要条件是对任意的数列 $\{x_n\}$, $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$, $x_n\neq x_0$, 都有 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=a$(极限过程 $x\to x_0$ 也可以是 $x\to\infty$).

利用海涅定理,求数列的极限就转化为求函数极限转而得到. 如求出的常用公式: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,(a>0)$, $\lim_{n\to\infty}a_n{}^{b_n}=a^b$(其中 $\lim_{n\to\infty}a_n=a>0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=b$). 其中,函数的极限还可以应用等价无穷小,洛比塔法则,泰勒公式等求解.

例8 求 $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{2}{3e^n+1})^{\sqrt{2n+1}}$.

解 因为 $(1+\frac{2}{3e^n+1})^{\sqrt{2n+1}}=e^{\sqrt{2n+1}\ln(1+\frac{2}{3e^n+1})}$, 利用等价无穷小和洛必塔法则,有

$$
\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}\ln(1+\frac{2}{3e^x+1})=0,
$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{2n+1}\ln(1+\frac{2}{3e^n+1})=0$. 从而

$$
\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{2}{3e^n+1})^{\sqrt{2n+1}}=e^0=1.
$$

例9 求 $\lim_{n\to\infty}[n-n^2\ln(1+\frac{1}{n})]^{n^3[\sin\frac{1}{n}-\sin(\sin\frac{1}{n})]}$.

解 设 $b(x)=\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$, 由泰勒公式 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$, $x\in R$, 有

$$
\sin(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3!}+o(\sin^3 x),
$$

所以

$$
\lim_{x\to 0^+}b(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin^3 x}{3!}-o(\sin^3 x)}{x^3}=\frac{1}{6},
$$

从而

$$
\lim_{n\to\infty}n^3[\sin\frac{1}{n}-\sin(\sin\frac{1}{n})]=\frac{1}{6}.
$$

设 $a(x)=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$. 由泰勒公式 $\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)(-1<x\leqslant 1)$, 有

$$\lim_{x\to 0^+} a(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2-o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{2},$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\left[n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{2}.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left[n-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{n^3\left[\sin\frac{1}{n}-\sin\left(\sin\frac{1}{n}\right)\right]}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

6　利用斯特林(Stirling)公式和沃利斯(Wallis)公式求阶乘式极限

斯特林公式是 $n!$ 的近似计算公式，应用它能够快速求解有关 $n!$ 的数列极限. 对含有双阶乘的数列，可以应用沃利斯公式.

斯特林公式：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1$，或 $n!=\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\cdot e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}}$，$(0<\theta_n<1)$.

沃利斯公式：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}\cdot\left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2=\dfrac{\pi}{2}$，或 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}\cdot\left(\dfrac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\right)^2=\dfrac{\pi}{2}$.

单阶乘与双阶乘的换算公式：$(2n)!!=2^n n!$，$(2n-1)!!=\dfrac{(2n)!}{(2n)!!}=\dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

例 10　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c^n n!}{n^n}$.

分析　将 $n!$ 凑成斯特林公式的项与其余项的乘积，然后求解.

解　由斯特林公式 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1$，有

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{c^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{c^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}=\begin{cases}+\infty, & (c\geqslant e)\\ 0, & (-e<c<e).\\ \text{发散}, & (c\leqslant -e)\end{cases}$$

注　$c^n(c>1)$，$n!$，n^n 是三个不同阶的无穷大. 该例表明当 $1<c<e$ 时，n^n 仍然比 $(c^n\cdot n!)$ 高阶无穷大，直至 $c\geqslant e$ 时，才发生变化. 另外，此例中 $c=e$ 的情形，运用斯特林公式非常简单，而其余方法不易求解.

例 11　求 $\lim\limits_{n\to\infty}[(2n)!]^{\frac{1}{n\ln n}}$.

分析　对这个含阶乘式的幂指式变量，一般先将其恒等变形为 $e^{\frac{1}{n\ln n}\ln(2n)!}$，再将 $(2n)!$ 凑成斯特林的项与其余项的乘积，于是 $\ln(2n)!$ 成为代数和的形式，再分别求极限求解.

解　由斯特林公式 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}=1$，有

$$\lim_{n\to\infty}[(2n)!]^{\frac{1}{n\ln n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n\ln n}\ln(2n)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n\ln n}\ln\left[\frac{(2n)!}{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}\cdot\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\right]}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\ln\left[\frac{(2n)!}{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}\right]}{n\ln n}+\frac{\frac{1}{2}\ln(4\pi n)}{n\ln n}+\frac{2n\ln(2n)}{n\ln n}-\frac{2n\ln e}{n\ln n}\right]}=e^2.$$

注　例 5 也可采用斯特林公式方法求解，先将 $n!$ 与 $(2n)!$ 分别凑成斯特林的项与其余项的乘积，再求解.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln\left[\frac{1}{n^n}\cdot\frac{(2n)!}{n!}\right]}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left[\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!}\cdot\frac{(2n)!}{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}\cdot\frac{1}{n^n}\cdot\frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\right]}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left[\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!}\cdot\frac{(2n)!}{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot 2^{2n}}{e^n}\right]}=\frac{4}{e}.$$

例 12　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}}$.

解　由沃利斯公式，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$原式=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left\{(-1)\frac{\ln\sqrt{2n+1}}{n}+\frac{1}{n}\ln\left[\sqrt{2n+1}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]\right\}}=1.$$

注　同样利用沃利斯公式讨论极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}$ 等于 0[3].

参考文献

[1]　龚冬保，叶正麟. 数 e、Euler 常数与数列的极限[J]. 高等数学研究，2012，15(3)：6－8.

[2]　李萍，牟全武，周欣. 巧用定积分求解一类和式的极限[J]. 高等数学研究，2019，22(6)：33－34.

[3]　张海涛，陈慧琴. 关于带有“!”号数列极限的求法[J]. 高等数学研究，2017，20(6)：24－25.