第 25 卷 第 3 期　　高 等 数 学 研 究　　Vol.25,No.3
2022 年 5 月　　STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS　　May,2022

doi:10.3969/j.issn.1008－1399.2022.03.004

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 型幂级数收敛域的求法

韩建新

(山东财经大学 数学与数量经济学院，山东 济南 250014)

摘　要　利用数项级数的性质和 Abel 定理给出了 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 型幂级数收敛域的相关定理,进而提出了这类幂级数收敛域的求法,并举例进行了论证说明.

关键词　幂级数;收敛域

中图分类号　O127　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008－1399(2022)03－0010－03

On the Convergence Domain of the Power Series $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$

HAN Jianxin

(School of Mathematics and Quantitative Economics, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, China)

Abstract　In this paper, using properties of series of number terms and Abel's theorem, the related theorems and methods for the convergence domain of the power series $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ are given and demonstrated by some examples.

Keywords　power series, convergence domain

在微积分中,经常遇到求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 型幂级数的收敛域问题,在求这类幂级数的收敛域时,很多同学习惯上是先求出 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛域,然后对二者取交集进行求解,但这种做法有时是错误的,为此文献[1－3]等对这类幂级数的收敛域进行了一些有益的探讨,但都没有明确的指出何时能使用这一方法,何时不能使用这一方法.下面对这类幂级数的收敛域的求法进行探讨.

Abel 引理　如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在点 $x=x_0(x_0 \neq 0)$ 收敛,那么适合不等式 $|x|<|x_0|$ 的一切 x 使这个幂级数收敛,适合不等式 $|x|>|x_0|$ 的一切 x 使这个幂级数发散.

收稿日期:2020－06－04　　修改日期:2020－08－26

基金项目:国家自然科学基金(11971259).

作者简介:韩建新(1971－),男,山东枣庄,博士,教授,主要从事高等数学的教学与研究工作,Email:mohan2002@126.com.

利用 Abel 引理,可得下面的定理:

定理　设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛域分别为 I_1 和 I_2, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 的收敛域为 I,

(1) 若 $I_1 \neq I_2$,则 $I=I_1 \cap I_2$;

(2) 若 $I_1 = I_2$,则 $I=I_1 \cap I_2$ 或 $I \supset I_1 \cap I_2$.

证明　(1) 若 $I_1 \neq I_2$,① 对 $\forall x_0 \in I_1 \cap I_2$,则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 在点 x_0 都收敛,由数项级数的性质得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 在点 x_0 收敛;② 若 $x_0 \in I_1$ 且 $x_0 \notin I_2$ 或 $x_0 \notin I_1$ 且 $x_0 \in I_2$,则由数项级数的性质可得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 在点 x_0 发散,即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 在 $I_1 \cap \bar{I}_2$ 和 $\bar{I}_1 \cap I_2$ 上发散.③ 若 $x_0 \notin I_1$ 且 $x_0 \notin I_2$,假设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 在点 x_0 收敛,则由 Abel 引理可得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 在 $(-|x_0|, |x_0|)$

上收敛，从而在 $I_1 \cap \bar{I}_2$ 和 $\bar{I}_1 \cap I_2$ 上收敛，与 ② 矛盾，即 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 在点 x_0 发散，所以 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 在 $\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2$ 上发散.综上所述，若 $I_1 \neq I_2$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 的收敛域为 $I = I_1 \cap I_2$.

(2) 若 $I_1 = I_2$，则当 $x_0 \in I_1 \cap I_2$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 在点 x_0 收敛.当 $x_0 \notin I_1 \cap I_2$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 在点 x_0 都发散，所以由数项级数的性质可得 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 在点 x_0 可能发散，也可能收敛，所以 $I = I_1 \cap I_2 = I_1 = I_2$ 或 $I \supset I_1 \cap I_2 = I_1 = I_2$.

该定理显然可以推广到 $x - x_0$ 的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，这里不再赘述.

由定理可得，当 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛域不同时，是可以先求出 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛域，然后对二者取交集的方法来求 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 的收敛域的，但是，当 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛域相同时，利用这一方法来求 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 的收敛域就有可能出错了，这时可根据 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 的一般项，利用比较判别法或根值判别法等方法来求解收敛域.

例 1　将函数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

解

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x^2+4x+3} \\
&= \frac{1}{4\left(1+\dfrac{x-1}{2}\right)} - \frac{1}{8\left(1+\dfrac{x-1}{4}\right)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{4}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n.
\end{aligned}
$$

因为 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{4}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$ 的收敛域为 $(-1,3)$，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{4}\right)^n$ 的收敛域为 $(-3,5)$，所以由定理可得 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n$ 的收敛域为 $(-1,3) \cap (-3,5) = (-1,3)$.即

$$
\frac{1}{x^2+4x+3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}} - \frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n, \quad x \in (-1,3)
$$

例 2　求 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}x^n - \frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)$ 的收敛域.

解　对于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ 不难求得其收敛域均为 $[-1,1)$，根据定理在求 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}x^n - \frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)$ 的收敛域时，是不能直接取交集的，可根据比值判别法来求.

令 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{1}{n+1}x^{n+1} - \dfrac{1}{n+2}x^{n+2}}{\dfrac{1}{n}x^n - \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}}\right| = |x| < 1$ 可得 $-1 < x < 1$，当 $x = \pm 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}x^n - \frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)$ 都收敛，所以收敛域为 $[-1,1]$.

可见 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}x^n - \frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)$ 收敛域比 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛域的交集扩大了.

而对于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}x^n + \frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)$，不难求得其收敛域仍为 $[-1,1)$，与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛域的交集相等.

例 3　求 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}x^n - \frac{1}{5^n+3^n}x^n\right)$ 的收敛域.

解　不难求得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n+3^n}x^n$ 的收敛域均为 $(-5,5)$，故求 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5^n}x^n - \frac{1}{5^n+3^n}x^n\right)$ 的收敛域时，也不能直接取交集.根据例 2 的方法可求得其收敛域为 $\left(-\frac{25}{3},\frac{25}{3}\right)$.

从以上例子可以看出，只有当 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛域不同时，利用 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛域取交集的方法求 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 的收敛域才是万无一失的.

参考文献

[1] 何清.关于幂级数收敛域的几点注记[J].工科数学，1991,7(4):66-69.

[2] 马娜蕊.幂级数收敛半径的一些求法[J].高等数学研究，2004,7(3):37-38.

[3] 彭娟，范周田，杨蓉.关于幂级数收敛半径求法的注记[J].大学数学，2019,35(2):106-109.

简讯

国内的部分大学生数学竞赛介绍

国内的关于数学类的大学生竞赛有许多，前面已经介绍过的全国大学生数学竞赛，丘成桐大学生数学竞赛，陕西省大学生高等数学竞赛等，还有一些关于数学建模及应用类型的数学竞赛，如下面介绍的全国大学生数学建模竞赛，全国高校密码数学挑战赛，以及全国大学生市场调查与分析大赛.

1."高教社杯"全国大学生数学建模竞赛

该竞赛创办于1992年，由中国工业与应用数学学会主办，高等教育出版社冠名赞助.旨在提高学生建立数学模型和运用计算机技术解决实际问题的综合能力.每年一届，是首批列入"高校学科竞赛排行榜"的19项竞赛之一.经过30来年的发展，竞赛规模日渐壮大，参赛队伍从1992的10省(直辖市)74所院校的314队到2021年来自全国及美国、马来西亚等国家的1566所院校/校区、49529队(本科45075队、专科4454队)、14万多人参赛.

竞赛一般在每年9月中旬某个周末的连续72小时(一般是星期五上午8时至下一个星期一上午8时)举行. 赛题一般来自工程技术和管理科学等方面经过适当简化加工的实际问题.不要求参赛者预先掌握深入的专门知识，只需学过普通高等学校的数学课程，但又有较大的余地，供参赛者(三名学生为一队，分别主责为建模、编程和写作)在三天内能充分发挥聪明才智和创造精神，并且一般要用计算机得到结果. 经过三天的时间完成赛题需要的解答并以一篇长论文作为最后的结果.

官方网址：http://www.mcm.edu.cn/

2."天融信杯"全国高校密码数学挑战赛

该竞赛创办于2016年，由中国密码学会密码数学理论专业委员会、教育部高等学校数学类专业教学指导委员会和天融信科技集团股份有限公司主办，旨在以挑战赛形式比较精准地发现和及早培养在数学及其交叉应用领域有特殊才能的创新型青年数学人才.

每年举办一次，分为预选赛和全国决赛.由各赛区组织委员会负责各自赛区预选赛、评审和赛区颁奖，并推荐进入全国决赛的参赛队伍.各赛区推荐进入决赛的参赛队伍名额由全国竞赛组织委员会讨论确定.全国决赛采用集中现场陈述、演示和答辩的方式，由全国竞赛专家委员会组织的专家组通过现场答辩评审确定最终的获奖队伍.赛区奖励设有一等奖和二等奖，决赛奖励设有特等奖、一等奖、二等奖和三等奖.获奖名单确定后将举办颁奖仪式，并向获奖者颁发获奖证书.

竞赛领域为数学与密码学和信息安全交叉领域，竞赛主题为密码学和信息安全领域中的关键数学问题，是应用数学方法和计算机技术来解决实际问题.

竞赛通知、竞赛试题、赛程安排、竞赛 结果、竞赛消息和新闻等将在竞赛网站公布.竞赛网址：http://www.cmsecc.com/

3."正大杯"全国大学生市场调查与分析大赛

该竞赛创办于2010年，由中国商业统计学会主办.海峡两岸大学生市调大赛由中国商业统计学会与(台湾)中华应用统计学会共同主办，创办于2012年，是面向海峡两岸高校大学生的一项公益性专业赛事.旨在引导大学生创新和实践，提高学生的组织、策划、调查实施和数据处理与分析等专业实战能力，培养学生的社会责任感、服务意识、市场敏锐度和团队协作精神.自2010年启动以来，大陆地区除海南以外的各省、自治区、直辖市，近2100校次、37万人次参赛.是政府支持、企业认可、高校师生积极参与、海峡两岸高度联动的统计学科实践教学平台.

大赛评委由国家统计局专家、国内外知名的市场研究公司和知名品牌企业的研究总监、重点高校从事统计调查或营销教学的教授等组成.参赛作品有企业命题，政府委托课题或项目，也有学生自主选题.

设知识赛和实践赛两个竞赛环节.其中知识赛为个人赛，采取在线网考方式(每年的11月份)；实践赛为团体赛形式，分为分区赛(来年的4-5月份)和全国总决赛(暨海峡两岸大学生市场调查分析大赛的大陆地区选拔赛)(7-8月份)，两阶段赛程分别由分赛区组委会和大赛组委会组织实施.知识赛合格的选手自行组成团队参加实践赛环节(每个团队由3-5名选手组成).通过分区赛的团队可以参加全国总决赛.

官网首页：http://www.china-cssc.org/

西北工业大学数学与统计学院 林伟