第 24 卷 第 2 期
2021 年 3 月
高 等 数 学 研 究
STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS
Vol. 24, No. 2
Mar., 2021

doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2021.02.016

体积计算方法的剖析——从祖暅原理到三重积分

韩建新，周锋波
（山东财经大学 数学与数量经济学院 山东 济南 250014）

摘 要 结合实例，对祖暅原理、定积分、二重积分和三重积分这四种计算立体体积方法的具体计算过程进行了梳理，以求展示这四种方法之间的内在联系及其适用范围.

关键词 立体体积；祖暅原理；定积分；二重积分；三重积分

中图分类号 O172 **文献标识码** A **文章编号** 1008-1399(2021)02-0049-03

Zubi's Principle and Multi-integrals for Volume Calculation

HAN Jianxin and ZHOU Fengbo
(School of Mathematics, and Quantitative Economics, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014, China)

Abstract With examples, the four methods of calculating volumes, i.e. Zubi's principle, definite integral, double integral and triple integral, are summarized to show the internal relationships among these methods and their applicable ranges.

Keywords volume, Zubi's principle, definite integral, double integral, triple integral

计算立体体积是高等数学课程中积分学的重要应用之一，可使用的方法有定积分、二重积分和三重积分[1-2]，但很多同学对这三种方法之间的内在联系及其适用范围认识不清，导致在计算立体的体积时，思路不够清晰，选取方法不当. 下面对这三种方法的来龙去脉、演化发展过程及其之间的联系作一个梳理分析，从而加深读者对这三个方法的认识，更加顺畅的利用它们计算立体的体积，更希望借此能为同学们学习高等数学增加一份动力.

1 从祖暅原理到定积分

祖暅原理是公元六世纪初由我国数学家祖暅提出的，内容是：缘幂势既同则积不容异. 幂是截面积，势是立体的高，含义是夹在两个平行平面间的两个立体，被平行于这两个平行平面的任何平面所截，如果截得的两个截面面积总相等，那么这两个立体的体积相等. 定积分出现之后，假设某立体 Ω 在过点 $x=a$、$x=b$ 且垂直于 x 轴的两个平行平面之间，用 $A(x)$ 表示过点 x 且垂直于 x 轴的截面的面积，则可得该立体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

设两个立体 Ω_A 和 Ω_B 的高相等，不妨设它们都位于过点 $x=a$、$x=b$ 且垂直于 x 轴的两个平面之间，且在任意点 x 处两截面的面积 $A(x)$ 和 $B(x)$ 总相等，若 $A(x)$ 和 $B(x)$ 皆连续，则由公式 1 可得两个立体 Ω_A 和 Ω_B 的体积相等. 这个截面积相等则体积也相等的原理正是祖暅原理. 可见利用公式(1) 求体积与祖暅原理的思想方法具有内在统一性，是一脉相承的. 只是由于年代相差甚远，在微积分诞生之前，对于平行截面面积已知的立体是无法给出具体计算公式的，只能把待求的立体的体积转化为可求体积的立体来求. 但能提出"幂势既同则积不容异" 这样

收稿日期：2020-06-04 修改日期：2020-08-26
基金项目：国家自然科学基金(11971259).
作者简介：韩建新(1971—)，男，山东枣庄，博士，教授，主要从事高等数学的教学与研究工作，Email:mohan2002@126.com.

一个定性的结论也实属不易，为我们得到立体体积计算公式指明了方向：即高相等的立体的体积只与截面面积有关，体积应该可用截面积来表示. 而微积分出现之后，利用微元法得到的平行截面面积已知的立体的体积公式(1) 正体现了截面面积与体积的关系. 公式(1) 的出现既说明了祖暅原理的正确性，也体现了微积分的巨大威力. 从下面的例子可以比较直观的看出祖暅原理与公式(1) 的内在联系.

例1(根据2013上海市高考理科数学试题改编而成) 在 xoy 平面上，将两半圆弧 $(x-1)^2+y^2=1(x\geqslant 1)$、$(x-3)^2+y^2=1(x\geqslant 3)$ 和两直线 $y=1$、$y=-1$ 所围成的区域记作 D，如图1所示，求 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体 Ω 的体积 V.

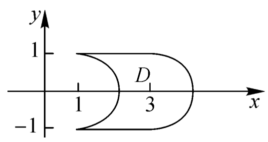

图1 区域 D

解 方法1：祖暅原理. 过点 $(0,y)(|y|\leqslant 1)$ 作立体 Ω 水平截面，不难求得截面面积为 $4\pi\sqrt{1-y^2}+8\pi$，因此需构造一个与立体 Ω 有相同截面面积的可求体积的立体，为此构造两个立体：一个是高为2，底面积为 8π 的长方体，另一个是半径为1，高为 2π 的圆柱体，并平躺放置，这两个立体与 Ω 放在同一水平面上，则它们的高相等，且在任何一个高度上 Ω 的截面面积与这两个立体的截面面积之和相等，根据祖暅原理可得 Ω 的体积与这两个立体的体积之和相等，故 Ω 的体积为

$$V=\pi\times 1^2\times 2\pi+2\times 8\pi=2\pi^2+16\pi.$$

方法2：根据旋转体的体积公式(1)，Ω 的体积为

$$V=\int_{-1}^{1}(3+\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1}(1+\sqrt{1-y^2})^2\mathrm{d}x$$
$$=2\pi^2+16\pi.$$

通过本例可以看出方法1难度较大，适用范围小，只能求一些比较规则立体的体积，对于一些不规则的立体就无能为力了，而第二个方法则直接简单，适用范围更加广泛，这是因为有了定积分这样一个重要工具. 由此可见数学的发展对人类的进步是多么的重要. 但定积分只能用来计算平行截面面积易求的立体体积.

2 从定积分到二重积分

二重积分出现之后，我们则可以进一步求出曲顶柱体这类立体的体积，从而扩大了可求体积的立体的范围. 假设立体 Ω 的底面是 xoy 平面上的有界闭区域 D，顶面是曲面 $z=f(x,y)(f(x,y)\geqslant 0$ 且在 D 上连续) 的曲顶柱体，其体积可用下面的二重积分计算

$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2}$$

利用二重积分计算曲顶柱体体积时，先是把曲顶柱体的体积用二重积分(2) 表示，然后化为累次积分计算. 若 $D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x)\}$，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x. \tag{3}$$

若 $D=\{(x,y)\mid c\leqslant y\leqslant d,\psi_1(y)\leqslant x\leqslant \psi_2(y)\}$ 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y. \tag{4}$$

因为 $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$ 和 $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$ 分别表示平行于 yoz 面和 xoz 面的截面的面积，所以把二重积分化为二次积分就相当于把曲顶柱体转化为了平行截面面积已知的立体计算体积的. 可见利用二重积分计算立体的体积和利用定积分也有着内在的联系，而不是孤立的. 当然在计算二重积分(2) 时，不一定都须或都能化成(3) 或(4)，有时需要采用极坐标或更一般的换元法，所以公式(2) 是公式(1) 的一个重要补充. 公式2主要用来计算曲顶柱体的体积.

3 从定积分、二重积分到三重积分

三重积分出现之后，对于任给的立体 Ω，其体积 V 都可利用下面的三重积分来表示：

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}v. \tag{5}$$

在直角坐标系下计算该三重积分时通常有两种方法. 对于第一个方法，为说明问题的简便起见，这里我们只介绍平行于 z 轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与闭区域边界曲面 S 相交不多于两个交点的区域的情况(如果不是这种区域可通过分割化成这种区域). 设区域 Ω 投影到 xoy 上得平面闭区域为 D，以 D 的边界为

准线作母线平行于 z 轴的柱面，该柱面与曲面 S 的交线将曲面 S 分为上下两部分，它们的方程分别为 $S_1: z=z_1(x,y)$ 和 $S_2: z=z_2(x,y)$. 则

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega \mathrm{d}v &= \iint_D [z_1(x,y)-z_2(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_D z_1(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_D z_2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned} \tag{6}$$

若 $z_1(x,y)$ 和 $z_2(x,y)$ 都是非负函数，则式(6)可理解为以 $S_1: z=z_1(x,y)$ 和 $S_2: z=z_2(x,y)$ 为曲顶，以 xoy 平面上的闭区域 D 为底面的两个曲顶柱体的体积之差. 可见利用公式(6)计算区域 Ω 的体积实际上是把其转化为曲顶柱体的体积进行计算的.

对于第二个方法，设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid (x,y)\in D_z, c_1\leqslant z\leqslant c_2\}$，其中 D_z 是竖坐标为 z 的平面截立体 Ω 所得的平面闭区域，则

$$\iiint_\Omega \mathrm{d}v = \int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{c_1}^{c_2}A(z)\mathrm{d}z, \tag{7}$$

其中 $A(z)=\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示平面区域 D_z 的面积. 可见利用公式(7)计算立体的体积是直接转化为平行截面面积已知的立体体积进行计算的. 当然我们在计算三重积分(5)的时候，不一定都须或都能化成公式(6)或(7)，有时需要采用柱面坐标或球面坐标或更一般的换元法计算[3]，所以利用三重积分计算立体体积这一方法最一般，适用范围最广泛.

例 2　计算椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 围成的椭球体 Ω 的体积 V.

解　方法 1：利用定积分，把椭球体看作平行截面面积已知的立体. 用竖坐标为 z 的平面截立体 Ω 所得的截面为椭圆面

$$D_z=\left\{(x,y,z)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}\right\},$$

由椭圆的面积公式不难求得 D_z 的面积为 $A(z)=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$，故椭球体 Ω 的体积为

$$V=\int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi abc. \tag{8}$$

方法 2　利用二重积分，把上半个椭球体看作曲顶柱体，根据椭球体的对称性，令 $x=ar\cos\theta, y=br\sin\theta$，不难求得椭球体 Ω 的体积为

$$\begin{aligned}V &= 2\iint_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\iint_D abcr\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{4}{3}\pi abc.\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $D=\left\{(x,y)\mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$ 表示椭球体 Ω 在 xoy 平面上的投影区域.

方法 3　利用三重积分，椭球体 Ω 的体积为

$$\begin{aligned}V &= \iiint_\Omega \mathrm{d}v=\int_{-c}^{c}\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi abc,\end{aligned} \tag{10}$$

或

$$\begin{aligned}V &= \iiint_\Omega \mathrm{d}v=\iint_D\left[\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\sigma \\ &= 2\iint_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\pi abc.\end{aligned} \tag{11}$$

在利用三重积分计算该椭球体体积时，式(10)是把三重积分化成了式(8)中的定积分，相当于把椭球体 Ω 看成了平行截面面积已知的立体，式(11)是把三重积分化成了式(9)中的二重积分，相当于把椭球体 Ω 转化为了曲顶柱体.

4　结语

由以上分析论述不难看出，公式(1)与公式(2)互为补充，公式(1)主要用于计算平行截面面积易求的立体体积，公式(2)主要用于计算曲顶柱体或容易转化为曲顶柱体的立体体积. 公式(5)应用最为广泛，用其计算立体的体积时，易于表示，而且计算时可选的方法更加灵活多样. 而祖暅原理只能计算一些比较特殊的立体的体积. 由此可见，随着积分学的发展，人们能计算体积的立体范围逐渐扩大，这也充分体现了高等数学的发展对人类社会的进步是多么的重要.

参考文献

[1]　华东师范大学数学系. 数学分析(上、下册)[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，2010.

[2]　同济大学数学系. 高等数学(上、下册)[M]. 7 版. 北京：高等教育出版社，2014.

[3]　蒲元酉，彭涛. 空间立体体积的积分计算方法[J]. 西安统计学院学报，1995，10(1)：55-60.