doi:10.3969/j.issn.1008-1399.2020.02.015

求实际问题中多元函数最值的几点心得

韩建新

(山东财经大学数学与数量经济学院,山东 济南 250014)

摘　要　本文在总结多元函数最值求法的基础上,结合实例,指出求解问题中的几个容易被卡住的地方,并给出解决这些问题的几点心得.

关键词　多元函数,最值,无条件极值,条件极值,拉格朗日乘数法.

中图分类号　O171　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008-1399(2020)02-0047-03

On Maximum or Minimum Values of Multivariable Functions

HAN Jianxin

(School of Mathematics and Quantitative Economics, Shandong University of Finance and Economics, Jinan 250014)

Abstract　Summarizing the methods of finding the maximum (minimum) values of multivariable functions, this paper presents some easy—stuck places with practical examples, and offers several useful guides.

Keywords　multivariable function, maximum (minimum) value, unconditional (conditional) extreme value, method of Lagrange multipliers.

求解实际问题中多元函数的最小值和最大值是偏导数的一个重要应用,也是高等数学的一个难点. 在求解时,一般要首先分清所给问题是一个条件最值问题,还是一个无条件最值问题. 对于无条件最值问题,则一般是先找到极值的嫌疑点即稳定点和偏导数不存在的点,再求出边界上的最值点,在求边界上的最值点时,一般是把边界满足的方程作为约束条件,转化为条件极值来求,最后比较这些点处的函数值的大小即可求出函数的最值. 对于条件最值问题,通常有两种求法:一种是转化为无条件最值问题的代入法,另一种是拉格朗日乘数法. 熟练掌握这些基本理论方法是求解实际问题中最值问题的前提. 但在求解具体问题时,出于各种原因很多同学仍然求不出来,下面将对其原因进行认真分析,并提出几点解题心得,供大家参考.

1　自变量的选取要得当

求解实际问题中的最值问题,第一步就是根据问题背景,通过合理假设,选取自变量,建立数学模型. 其中自变量的选取对于求得目标函数、约束方程以及随后的计算过程是非常重要的.

例 1　设圆的半径为 a,求该圆外切三角形面积的最小值.

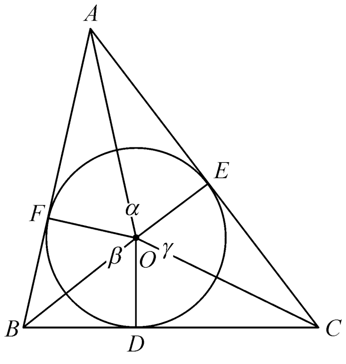

图 1　外切三角形

解　如图 1 所示,设圆心为 O,ΔABC 为圆 O 的任意外切三角形,D,E,F 为切点,设切点处的半径两两相夹所成的圆心角分别为 α,β,γ,则 $\alpha+\beta+\gamma=$

收稿日期:2018-09-29　　修改日期:2019-07-10

基金项目:国家自然科学基金(11971259)

作者简介:韩建新(1971—),男,教授,主要从事高等数学的教学与研究工作,电子邮箱:mohan2002@126.com.

2π，不难得出 ΔABC 的面积表达式为

$$S = a^2(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} + \tan\frac{\gamma}{2})$$

$$= a^2(\tan\frac{\alpha}{2} + \tan\frac{\beta}{2} - \tan\frac{\alpha+\beta}{2})$$

其中 $0 < \alpha, \beta < \pi$. 令其偏导数等于 0 可得 $\alpha = \beta = \gamma = \frac{2}{3}\pi$. 又因为 $A = S''_{\alpha\alpha}(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) = 4\sqrt{3}a^2 > 0$, $B = S''_{\alpha\beta}(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) = 2\sqrt{3}a^2$, $C = S''_{\beta\beta}(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) = 4\sqrt{3}a^2$, $B^2 - AC = -36a^4 < 0$，所以 S 在稳定点 $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 取极小值，又因为是唯一的稳定点，没有偏导数不存在的点，所以也是最小值点，即 ΔABC 为正三角形时面积最小，最小值为 $3\sqrt{3}a^2$.

在解决这个问题时，我们选取切点处的半径两两相夹所成的圆心角作为自变量，目标函数和约束方程都比较容易求出. 但很多同学却不能顺利求出该题，其中一个原因是自变量的选取不当. 若该题选取三角形顶点与圆心的连线两两相交所成的圆心角 α', β', γ' 为自变量求解，则约束方程 $\alpha' + \beta' + \gamma' = 2\pi$ 容易求得，但目标函数很难用它们表示. 若选取三边的长 x, y, z 为自变量，则目标函数 $S = \frac{1}{2}a(x+y+z)$ 很容易求得，但约束方程比较难求. 另外，如果本题把切点处的半径两两相夹所成的圆心角设为 2α，2β，2γ，则能使得运算过程更加简单，而如果直接设成 2α，2β，$2\pi - 2\alpha - 2\beta$，则可直接把本例中的极值问题转化为无条件极值问题，计算起来更加快捷.

心得 1：在求最值应用问题时，自变量的选取非常关键. 选取自变量时，一方面要便于寻找变量之间的关系，即约束方程，另一方面也要便于求得目标函数的表达式，同时兼顾运算过程简化.

2. 在求解条件极值问题时，注意对目标函数与约束方程进行灵活转化

例 2 在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点，使它到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离最短.

解 设 (x, y) 为椭圆上任意一点，则点 (x, y) 到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|2x + 3y - 6|}{\sqrt{13}} \tag{1}$$

若直接以(1)式为目标函数可构造如下拉格朗日函数

$$L(x, y, \lambda) = \frac{|2x + 3y - 6|}{\sqrt{13}} + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$$

因为上式中含有绝对值，不是初等函数，求导不方便，所以直接以(1)式作为目标函数进行求解是非常麻烦的，故用

$$d^2 = f(x, y) = \frac{1}{13}(2x + 3y - 6)^2 \tag{2}$$

为目标函数，构造如下拉格朗日函数

$$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{13}(2x + 3y - 6)^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$$

令其偏导数等于 0 可解得稳定点 $(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}, \frac{5}{52})$，$(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{52})$，且 $f(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}) = \frac{1}{13}$，$f(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}) = \frac{121}{13}$，因为椭圆为一有界封闭曲线，它与直线之间必有最短距离，所以椭圆上的点 $(\frac{8}{5}, \frac{3}{5})$ 到直线的距离最短.

心得 2：对目标函数或约束方程进行合理转化或变形，对于简化某些最值问题的求解过程是非常必要的. 目标函数转换的基本原则是保持转换后的目标函数与原来的目标函数具有相同的最值点. 而约束程转化的基本原则是保持转换后的约束方程与原来的约束方程具有相同约束性.

3. 求条件极值问题时，注意求解方法的选取

求解条件极值问题，通常有两种方法：拉格朗日乘数法和转化为无条件极值问题的代入法. 其中拉格朗日乘数法条件更加宽松，适用范围更加广泛，其适用范围一般教科书上都有明确的定理[1]给出. 而代入法要求的条件更加严格，关于代入法的适用范围和注意的问题，文献[2－4]进行了详细的阐述.

例 3 形状为椭球 $4x^2 + y^2 + 4z^2 \leqslant 16$ 的空间探测器进入地球大气层，其表面开始受热，1 小时后在探测器的点 (x, y, z) 处的温度为 $T = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$，求探测器表面最热的点.

解法一(代入法)：将约束方程 $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ 化为 $x^2 = \frac{16 - y^2 - 4z^2}{4}$，然后代入 $T = 8x^2 +$

$4yz-16z+600$ 可得

$$T=-2y^2-8z^2+4yz-16z+632\ ,\quad (y^2+4z^2\leqslant 16)\qquad(3)$$

下面分三步求(3)式的最值：(ⅰ)求可能的极值点. 令(3)式的偏导数等于 0 可得两个稳定点$(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$和$(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$.(ⅱ)求边界 $y^2+4z^2=16$ 上的可能最值点，构造拉格朗日函数

$$L(y,z,\lambda)=-2y^2-8z^2+4yz-16z+632+\lambda(y^2+4z^2-16)$$

令其偏导数等于 0 可得稳定点$(0,4,0,2)$.(ⅲ)比较函数值的大小. 比较函数值 $T(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})=\frac{1928}{3}$，$T(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})=\frac{1928}{3}$，$T(0,4,0)=600$，可得探测器表面的最热的点为$(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$和$(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$.

解法二(拉格朗日乘数法)：构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda)=8x^2+4yz-16z+600+\lambda(4x^2+y^2+4z^2-16)$$

令其偏导数等于 0 可得拉格朗日函数的三个稳定点为$(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-2)$，$(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-2)$，$(0,4,0,0)$. 因为 $T(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})=\frac{1928}{3}$，$T(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})=\frac{1928}{3}$，$T(0,4,0)=600$，所以探测器表面的最热的点为$(-\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$和$(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$. 对于本题，拉格朗日乘数法要比代入法简单.

心得 3：在求条件极值问题时，恰当的选取求解方法，能简化运算过程.

4. 利用拉格朗日乘数法求条件最值问题时，要注意考虑约束方程所表示的曲面的边界点或曲线的端点和梯度等于 $\vec{0}$ 的点处的函数值.

根据文献[2]中的定理 18.6 可得，求目标函数 $f(x,y,z)(f(x,y))$ 在约束方程 $\varphi(x,y,z)=0(\varphi(x,y)=0)$ 下的极值时，如果 f 和 φ 在 D 内都具有一阶连续的偏导数，当内点 P_0 是极值点且 $\mathrm{grad}\varphi(P_0)\neq\vec{0}$，则存在常数 λ_0，使得$(x_0,y_0,z_0,\lambda_0)((x_0,y_0,\lambda_0))$为拉格朗日函数的稳定点. 因此利用拉格朗日乘数法只能求出满足 $\mathrm{grad}\varphi(P_0)\neq\vec{0}$ 的极值点 P_0，但满足 $\mathrm{grad}\varphi(P_0)=\vec{0}$ 的内点 P_0 也可能是目标函数极值点，当然也可能是最值点. 另外目标函数的最值也有可能在曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 的边界或曲线 $\varphi(x,y)=0$ 的端点取到，而极值则不会在曲面边界或曲线端点取到. 因此，求目标函数的最值时，除了考虑根据拉格朗日乘数法求出的稳定点处的函数值，还要考虑约束方程所表示的曲面的边界点或曲线的端点和梯度等于 $\vec{0}$ 的点处的函数值，然后比较这些点处的函数值即可求出目标函数的最值，否则容易得出错误的结论或求不出结果. 下面以文献[5]中的例子为例说明.

例 4　某公司的两个工厂生产同样的产品. 第一个工厂生产 x 单位产品和第二个工厂生产 y 单位产品的总成本为 $C(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$，若该公司生产任务是 500 单位产品，问如何分配任务才能使总成本最小.

解　由题意可知本题是求在 $x+y=500$ 的条件下，$C(x,y)=x^2+2y^2+5xy+700$ 的最小值，构造拉格朗日函数

$L(x,y,\lambda)=x^2+2y^2+5xy+700+\lambda(x+y-500)$ 令其三个偏导数等于 0 可得 $x=125$，$y=375$. 如果不考虑自变量 x,y 取值范围，则很容易误认为当 $x=125,y=375$ 时成本最小. 但由题意可得 x，y 的取值范围是以$(500,0)$和$(0,500)$为端点的直线段. 所以最小值还有可能在约束方程 $x+y=500$ 的端点$(500,0)$和$(0,500)$取到. 因为 $C(125,375)=531950$，$C(500,0)=250700$，$C(0,5000)=500700$. 所以当 $x=500,y=0$ 时成本最小，即把任务都分配给第一个工厂，总成本最小. 而 $x=125,y=375$ 实际上是最大值点. 文献[5]认为利用拉格朗日乘数法很难求出本题，故改用了代入法，但如果能考虑到限制条件所表示的线段端点处的函数值，则利用拉格朗日乘数法是可以求出的.

心得 4：在利用拉格朗日乘数法求解条件最值问题时，不要忽视限制条件表示的曲面边界点或曲线端点处的函数值和梯度等于 $\vec{0}$ 的点处的函数值.

(下转第 51 页)

在且二者相等，即 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$，则称 $f(P)$ 在点 P_0 连续.

而基于"聚点定义"的二元连续的定义为：

定义 4[2]　设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点且 $P_0\in D$. 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

那么称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

需要特别注意的是，基于"聚点定义"的二元连续的定义 4 可能不满足《数学分析》教材中[1,3]给出的某些特殊结论，比如：如果二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续，那么一元函数 $g(x)=f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，$h(y)=f(x_0,y)$ 在点 $y=y_0$ 处也连续.

下面我们就来看一个简单的反例：考虑二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}, & xy\geq -1, xy\neq 0;\\ \dfrac{1}{2}, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

易知 $f(x,y)$ 的定义域是

$$D=\{(x,y)\mid xy\geq -1, xy\neq 0\}\cup\{(0,0)\},$$

并且 $P_0(0,0)$ 是 D 的聚点，根据定义 4，我们有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(\sqrt{xy+1}-1)\cdot(\sqrt{xy+1}+1)}{xy\cdot(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\frac{1}{2}=f(0,0)$$

从而二元函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(0,0)$ 点处连续，但是 $g(x)=f(x,0)$ 在 X 轴上除原点 $P_0(0,0)$ 外处处都没有定义，自然在 $x=0$ 点处不连续，$h(y)=f(0,y)$ 在 Y 轴上除原点 $P_0(0,0)$ 外处处也都没有定义，自然在 $y=0$ 点处也不连续.

上述问题是由于 $P_0(0,0)$ 仅仅是定义域 D 的聚点而不是内点造成的，如果 $P_0(0,0)$ 是二元函数的内点的话，就不会出现这种问题了. 事实上，令

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}, & xy\geq -1, xy\neq 0;\\ \dfrac{1}{2}, & x=0 \text{ 或 } y=0.\end{cases}$$

则由定义 4 可知 $g(x,y)$ 在内点 $P_0(0,0)$ 处二元连续，并且 $h(x)=g(x,0)\equiv\dfrac{1}{2}$ 在 $x=0$ 点处连续，$k(y)=g(0,y)\equiv\dfrac{1}{2}$ 在 $y=0$ 点处连续.

通过本文的讨论可以知道，尽管二重极限的"空心邻域定义"容易理解、过渡自然，但是它有致命的缺陷，应该尽量避免使用. 不过大家在使用主流的"聚点定义"时也需要注意，在某些特定的场合，或者对某些特殊的结论，"聚点定义"可能需要作一定的补充和修正，比如对于"二元连续，则两个一元连续"这个特殊结论，如果我们能事先声明该结论所涉及的点 $P_0(x_0,y_0)$ 是定义域 D 的内点的话[1,3]，那么这个结论毫无疑问也是正确的.

参考文献

[1]　欧阳光中、朱学炎、金福临、陈传璋. 数学分析[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，2018.

[2]　同济大学数学系，高等数学[M]. 7 版. 北京：高等教育出版社，2014.

[3]　华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 4 版. 北京：高等教育出版社，2010.

[4]　陈纪修、於崇华、金路. 数学分析[M]. 2 版. 北京：高等教育出版社，2004.

（上接第 49 页）

最后需要补充说明的是，在求解多元函数最值问题时，除了以上介绍的理论、方法之外，对于个别问题，有时也可根据问题的几何意义直观的求出结果. 例如在例 2 中，从直观上不难想象，当已知直线与椭圆无交点时，椭圆上平行已知直线的切线有两条，对应的切点有两个. 其中一个到直线的距离最短，另一个最长，因此也可通过求平行于已知直线的切线的切点求解.

参考文献

[1]　华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 第四版. 北京：高等教育出版社，2014：178.

[2]　董淑转. 条件极值转化为无条件极值的条件[J]. 运城高等专科学校学报，2001，(3)：11.

[3]　于涛. 代入法求解条件极值的一点补遗[J]. 高等数学研究，2009，12(2)：39－40.

[4]　莫国良. 关于用代入法求条件极值的一点注记[J]. 高等数学研究，2004. 7：42－43.

[5]　李天胜. 从一道错误的例题谈条件极值的代入法[J]. 高等数学研究，2002，4(1)：22.