

# 矩阵的“秩”探源

王继强

(山东财经大学 数学与数量经济学院, 山东 济南 250014)

摘 要 本文从词源、表述和用途等方面对矩阵的秩的概念进行了探究, 希望达到正本清源、释人疑窦的目的.

关键词 矩阵; 秩; 向量; 来源

中图分类号 O151.2 文献标识码 A 文章编号 1008-1399(2020)04-0088-02

## The Origin of the “Rank” of a Matrix

WANG Jiqiang

(School of Mathematics and Quantitative Economics, Shandong University of Finance and  
Economics, Jinan 250014, China)

**Abstract** This article discusses the origin, expression and application of the rank of a matrix, in order to trace the origin and to dispel doubts.

**Keywords** matrix, rank, vector, origin

### 1 引言

在线性代数中, 矩阵的“秩”是一个相当重要的概念, 然而因其定义的复杂性, 令不少学习者惶惑不解. 甚而, “秩”这个词本身就引起很多人的兴趣. 比如, “秩”的概念是怎么产生的? 我国数学界的前辈先贤们为什么要把这个概念翻译为“秩”? “秩”这个词本身是什么意思? “秩”的中文意涵与线性代数中“秩”的定义的相关度高吗?

针对以上问题, 笔者在此谨献出自己的一管之见, 供同行们参考.

### 2 探源

在国内现行《线性代数》教材中, 矩阵的“秩”大多是如下定义的<sup>[1,2,3]</sup>:

“矩阵  $A$  中非零子式的最高阶数称为  $A$  的秩.”

当然, 定义中涉及的“子式、非零子式”等概念都需要预先给出定义, 此处从略. 正因为定义中概念

“擦”概念, 才使得不少初学者迷惑不解, 甚至在很长一段时间内仍然不甚了了. 其实, 只要逐一理解、切实掌握定义中涉及的每一概念, “秩”的概念还是不难理解的. 在这方面, 同行们已做了大量卓有成效地工作, 笔者不想班门弄斧, 反倒对“秩”的来龙去脉甚感兴趣.

矩阵的秩的概念最早是由德国数学家弗罗贝尼乌斯(T. G. Frobenius)在 1879 年提出来的<sup>[4]</sup>:

“如果一个矩阵的所有  $r+1$  阶子式为 0, 但至少有一个  $r$  阶子式不为 0, 那么就称  $r$  为这个矩阵的秩.”

很显然, 这完全就是现今《线性代数》教材中矩阵的“秩”的流行定义.

在弗罗贝尼乌斯的德文原著中, “秩”被称为“rang”, 意思是“等级、分类、阶层”等. 在英文中, “秩”称为“rank”, 意思是“等级、官阶(军衔)、阶层、种属、身份、行列”<sup>[4-6]</sup>.

在中文中, “秩”从“禾”从“失”, 其中“禾”指五谷, 引申为官员的俸禄, “失”为“秩”的省略, 指后车超越前车, 引申为动态排序. 联合起来, “秩”表示“俸禄的动态排序”, 引申为“根据功过评定的官员品级”, 再引申为“次序、等级、阶层”等<sup>[7-8]</sup>.

总之, 根据字面意思, “秩”是用来衡量矩阵的

收稿日期: 2019-09-24 修改日期: 2020-03-13

基金项目: 山东财经大学首批通识选修课核心课程项目(1707017003).

作者简介: 王继强(1976-), 男, 山东枣庄人, 博士, 副教授, 研究方向: 大学数学教学和研究, Email: sdcadmcm@126.com.

“等级”高低的. 然而, 上述两个定义似乎看不出“秩”的这个功能. 这是为什么呢?

让我们来看一个“秩”在线性代数中的应用的例子:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(阶梯形矩阵)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(阶梯形矩阵)

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 10 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(阶梯形矩阵)

据向量的线性相关性知识知, 矩阵  $A$  的秩为 1, 故  $A$  的四个列向量中有一个向量可作为极大无关组, 其余三个向量可由极大无关组线性表示. 也就是说,  $A$  的四个列向量中只有一个是“有效”的, 其余三个都是“冗余”的!

类似地, 矩阵  $B$  的秩为 2, 故  $B$  的四个列向量中只有两个是“有效”的, 其余两个是“冗余”的. 矩阵  $C$  的秩为 3, 故  $C$  的四个列向量中只有三个是“有效”的, 其余一个是“冗余”的.

由此可见, 同样是  $3 \times 4$  矩阵, 秩越大, 矩阵的冗余数据越少; 秩越小, 矩阵的冗余数据越多. 换言之, 秩越大, 矩阵的“等级”越高; 秩越小, 矩阵的“等级”越低.

“秩”贴切地反映了矩阵的“等级”, 无怪乎前人要把“rank”翻译为“秩”! 原来如此! 这才是矩阵的

“秩”的真正内涵.

且看 Leon 对矩阵的“秩”的定义<sup>[9]</sup>: The rank of a matrix  $A$  is the dimension of the column(row) space of  $A$ .

Leon 的定义简言之即: “秩”是矩阵的列(行)向量组的极大无关组中向量的个数, 这再次验证了笔者对“秩”的理解的正确性.

### 3 结束语

大学数学中有些概念看似平常, 实则不然, 矩阵的“秩”即为其一. 如果能理解这些概念的来源, 对于大学数学的教与学无疑都是有益的.

#### 参考文献

- [1] 同济大学数学系. 线性代数[M]. 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2014: 66 - 68.
- [2] 郝秀梅, 姜庆华. 线性代数[M]. 4 版. 北京: 经济科学出版社, 2017: 70 - 71.
- [3] 赵树嫖. 线性代数[M]. 3 版. 北京: 中国人民大学出版社, 1998: 96 - 97.
- [4] 知乎. <https://www.zhihu.com/question/24975154/answer/90267086>[EB/OL]. 2016.
- [5] 张芳杰. 牛津现代高级英汉双解词典(简化汉字版)[M]. 北京: 商务印书馆, 1996: 929.
- [6] 胡树声, 祝贺, 葆音, 等. 学生英汉多用词典[M]. 北京: 科学普及出版社, 1989: 712 - 713.
- [7] 百度百科. [https://baike.baidu.com/item/%E7%A7%A9/11045329?forcehttps=1%3Ffr%3Dkg\\_hanyu](https://baike.baidu.com/item/%E7%A7%A9/11045329?forcehttps=1%3Ffr%3Dkg_hanyu)[EB/OL]. 2019.
- [8] 辞海编辑委员会. 辞海(增补本)[M]. 上海: 辞书出版社, 1982: 513.
- [9] Leon S. J. 线性代数(英文版)[M]. 7 版. 北京: 机械工业出版社, 2007: 162 - 163.

(上接第 87 页)

到一些教学方法的实施效果. 当教学效果出现不良时, 需要及时调整老师授课方式或插入对学生的思想教育以及情感教育, 比如  $C_{10}$  探究式教学法与  $C_{11}$  情感教育法;

(2) 对于同一个老师所授班级的不同, 我们选定学生人数, 从自主学习能力、数学的需求以及课堂气氛、四个维度进行调查发现: 学生学习高等数学的内在的驱动力很重要, 也会影响教学效果与教师教学方法的实施. 当教学效果出现差时, 及时调整老师授

课方法. 碰到个别学生厌学等不好的状态时, 我们需要对个别学生进行心理疏导, 思想教育以及情感教育, 如  $C_{10}$  探究式教学法与  $C_{11}$  情感教育法的实施; 当学生对某个知识点掌握欠缺时, 应该对某些学生进行专项练习, 比如  $C_9$  练习教学法.

#### 参考文献

- [1] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型[M]. 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [2] 邱文教, 赵光, 雷威. 基于层次分析法的高校探究式课堂教学评价指标体系构建[J]. 高等工程教育研究, 2016, (6): 138 - 143.